

# Laboratorio de Mecatrónica para el Análisis Dinámico de Sistemas Mecánicos

Gerardo Peláez<sup>(1,3)</sup>, Camilo Quintáns<sup>(2,3)</sup>, Enrique Mandado<sup>(2,3)</sup>

(1) Dept. Ingeniería Mecánica de la Universidad de Vigo  
(2) Dept. Tecnología Electrónica de la Universidad de Vigo  
(3) Instituto de Electrónica Aplicada (Univ. de Vigo)  
36310 Vigo, España  
gpelaez@uvigo.es

Pilar Fernández-Sánchez<sup>(1,2)</sup>

(1) Dept. Electrónica y Telecomunicaciones de la Universidad del País Vasco.  
(2) Instituto de Electrónica Aplicada (Univ. de Vigo)  
Donosti, Spain  
pilar.fernandez@ehu.es

**Abstract**—This work fancy to give the keys for the primary get inside to the mechatronics technology. Therefore it introduces some benchmark cases, mentioned in the following. The establishment by empirical resources of the validity of multibody dynamic models described by differential algebraic equations, specifically dealing with overhead transportation systems and gantry cranes. The availability of the rotating machinery vibration response that reflects the combined interaction of dynamic and stationary machine elements in order to solve the field balancing plus the diagnosis of machinery malfunctions. The identification of a fluid parameter through its sloshing measurement. This works will show how a well suited mechatronics lab can help the engineers to solve the trade off between theory and practice. (Abstract)

*Mechatronics Multibody Rotodynamics Sloshing (key words)*

## I. INTRODUCCIÓN

La Mecatrónica es un área compleja de la Tecnología que combina la Mecánica y la Teoría de Control con todas las tecnologías vinculadas a los fenómenos electromagnéticos, como son la Electrónica, la Informática, y la Telecomunicaciones. De acuerdo con esto la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos, conocida como ASME (acrónimo de American Society of Mechanical Engineers) define los sistemas mecánicos del siglo XXI como un “Conjunto de elementos mecánicos y electromecánicos, coordinados y controlados por redes de información (computadores y seres humanos) que desarrollan tareas dinámicas que involucran fuerzas y flujos de energía”. Esta definición pone en evidencia que los sistemas mecatrónicos son complejos y afectan a muchas ramas del conocimiento tecnológico.

El estudio de la Mecánica se ha realizado tradicionalmente dividiéndola en tres partes: la Estática, la Cinemática y la Dinámica. En particular la Dinámica trata de la relación entre el movimiento y las fuerzas causantes del mismo. Aunque en las tres áreas, las medidas que indican la evolución real del sistema mecánico se consideran en general un elemento clave, hay un consenso generalizado en que la Dinámica es la que

exige un esfuerzo técnico mayor, porque incluye entre otras subáreas la tribología, la rotodinámica, el análisis de sistemas multicuerpo, y la dinámica de sistemas no lineales.

Por las razones explicadas anteriormente, es de gran importancia para garantizar la calidad de la formación de los ingenieros especializados en Mecatrónica, disponer de los recursos adecuados, para contrastar la respuesta teórica de un sistema dinámico, con la respuesta real del mismo o de otro muy similar, implementado en el laboratorio. Esto motivó el desarrollo de un laboratorio para el que se diseñaron y construyeron un conjunto de sistemas mecánicos a los que se les conectaron los sensores adecuados en cada caso. A continuación se describe cada uno de ellos mediante una exposición teórica, los resultados de su simulación y el experimento real correspondiente.

## II. DESCRIPCIÓN DEL LABORATORIO

De acuerdo con lo indicado en el apartado anterior, se desarrollaron los siguientes proyectos experimentales en el laboratorio de Mecatrónica:

- Elevación industrial: Dinámica de sistemas con cargas suspendidas y sistemas multicuerpo.
- Rotodinámica: Análisis dinámico de una máquina rotativa de referencia
- Identificación de Sistemas Dinámicos: Análisis del desplazamiento de un contenedor de fluidos (*Sloshing*).

En cada uno de los proyectos, la Mecatrónica facilita la verificación experimental de la respuesta teórica esperada o resuelve la identificación de parámetros. Además, mediante técnicas de filtrado Kalman, se mejora la precisión y se ajustan

a la realidad industrial los modelos que se utilizan en simulación.

### A. Elevación industrial: Dinámica de sistemas con cargas suspendidas

El amplio grupo de sistemas mecatrónicos denominados sistemas de elevación industrial, se pueden dividir en puentes grúa y grúas con accionamientos eléctricos y sistemas multicuerpo de transporte de piezas en cabeza. A continuación se describen los proyectos correspondientes

#### Puentes grúa y grúas con accionamientos eléctricos

En este tipo de sistemas la dinámica se puede describir mediante ecuaciones diferenciales ordinarias [Ordinary Differential Equations (ODE)], que se obtienen de forma intuitiva asumiendo algunas simplificaciones. En la Fig.1.a se indica un modelo basado en la partícula material aplicado a un puente grúa, en el que se supone que toda la masa de la carga suspendida es puntual. En este caso, se realiza una aproximación newtoniana Fig.1.b, en la que se explicitan las fuerzas y las aceleraciones de la carga. La proyección de ambas, en la dirección tangencial descrita por el vector  $e_t$ , permite, de acuerdo con la segunda ley de Newton, escribir la ecuación:

$$\hat{e}_\varphi - m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi) = m_1 \cdot L \cdot \ddot{\varphi} - \ddot{x} \cos(\varphi) \cdot m_1 \quad (1)$$

a partir de la cual, por reordenación de los términos, se obtiene la ecuación:

$$m_1 \cdot L \cdot \ddot{\varphi} + m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi) = \ddot{x} \cdot \cos(\varphi) \cdot m_1 \quad (2)$$

en la cual  $\varphi$  es la desviación respecto de la vertical de la carga puntual,  $m_1$  es la masa de la carga,  $L$  es la longitud de sustentación y  $\ddot{x}$  es la aceleración del patín (trolley) en su guía. Cuando las desviaciones respecto de la vertical de la carga son inferiores a  $10^\circ$  esta ecuación se puede linealizar, con un error inferior al 5%, para obtener la ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes constantes completa :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \cdot \varphi = \frac{\ddot{x}}{L} \quad (3)$$

La Fig.2 muestra el resultado de simulación de la respuesta dinámica del modelo descrito por la ecuación (3), mediante integración numérica realizada con la herramienta informática (software) Matlab [1]. Los métodos numéricos de integración tienen como objetivo obtener, a partir de un sistema continuo expresado mediante una ecuación diferencial ordinaria, en un espacio de estados, una secuencia de valores del vector de estado  $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \dots, \varphi(t_i)$  que aproxima la solución de la ecuación anterior, con el intervalo de integración  $h = t_i - t_{i-1}$ . Además  $\ddot{x}$ , que es la parte no homogénea de la ecuación diferencial, puede, en general, no ser lineal. En Matlab se dispone de librerías de integración numérica que contienen funciones denominadas solucionadores (solvers), entre los cuales se puede elegir uno de paso simple o múltiple.

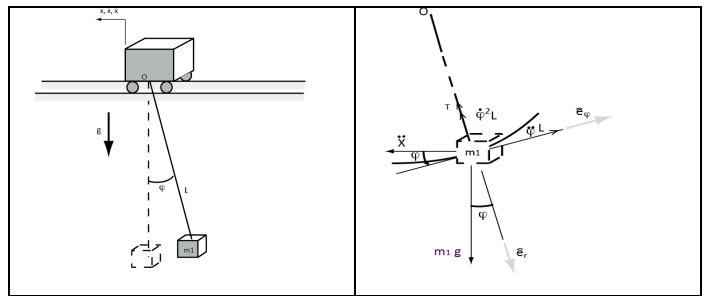


Fig 1.-a) Modelo newtoniano de un puente grúa. b) Fuerzas y aceleraciones.

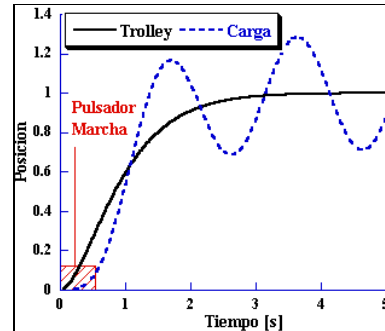


Fig.2.- Simulación de la respuesta dinámica por integración numérica de la ecuación diferencial mediante un solucionador (solver) de Matlab.

Para realizar el análisis experimental se diseñó y construyó un minipuerto grúa (gantry crane) (Fig.3.a), que consiste en tres guías lineales sobre barras de aluminio para montaje rápido. Dos de las guías son paralelas y actúan como juntas prismáticas de desplazamiento longitudinal y la tercera es perpendicular a las otras dos y está emplazada en la viga transversal. El mini puente grúa está accionado mediante dos servomotores POSMO-A (75w) de Siemens, que transmiten el par, mediante una reductora Puyol-Muntalá 10:1, a sendas poleas dentadas de 75mm de diámetro. La correa dentada que subtienden las poleas transmite el movimiento mediante un acoplador que cierra la correa y es solidario con la viga transversal. Un segundo mecanismo de polea dentada y correa desplaza también el carro de la guía lineal transversal mediante un acoplador de cierre. Los ángulos de desviación respecto de la vertical de la carga se miden mediante dos potenciómetros montados uno sobre otro que son ortogonales entre sí y coincidentes con las dos direcciones de desplazamiento del minipuerto grúa. Dichos potenciómetros forman de hecho dos juntas rotativas que proporcionan unívocamente la información correspondiente a la desviación de la carga suspendida respecto de la vertical.

Las órdenes de movimiento de los servomotores, son consignas de velocidad, que se envían mediante una red de control PROFIBUS conectada a un autómata programable S7-313 que posee un procesador de comunicaciones CP 342-5.

#### Sistemas multicuerpo de transporte de piezas en cabeza

Son sistemas cuya dinámica se puede plantear de forma coherente a partir de la teoría de la dinámica del sólido rígido (euleriana).

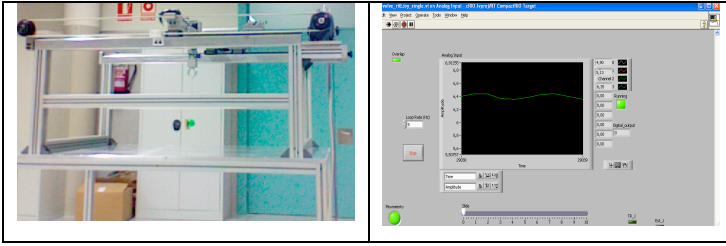


Fig.3.- Mini puente grúa con una carga puntual suspendida: (a) fotografía. Señal proporcionada por el sensor potenciométrico que indica la desviación de la carga mediante instrumentación virtual (b)

Para ello es necesario asumir ciertas condiciones en el sistema, especialmente que el número de sólidos no sea muy elevado, porque en este caso el número de ecuaciones que se pueden plantear intuitivamente resulta necesariamente elevado y el planteamiento euleriano vectorial es ineficiente. Debido a ello, la teoría más reciente de sistemas multicuerpo, relativa a los cuerpos que interactúan entre sí mediante juntas cinemáticas, proporciona resultados más ágiles y fáciles de obtener, porque se trata de un conjunto de métodos matemáticos que resuelven ecuaciones algebraicas diferenciales [*Differential Algebraic Equations* (DAE)] mediante herramientas numérico-computacionales [2]. Estos métodos representan una aproximación más directa y eficiente, basada, en parte, en la dinámica variacional o de Lagrange y no utilizan los planteamientos intuitivos de la dinámica newtoniana. En la Fig. 4 se indican dos sistemas multicuerpo. El sistema de la Fig.4a es un patín (*trolley*) cuya carga suspendida es un doble péndulo, formado por los tres cuerpos siguientes, que interactúan unos con otros a través de juntas cinemáticas:

- Una junta prismática entre el cuerpo “1” y el marco de referencia fijo “0”.
- Una junta de articulación A entre el cuerpo “1” y el cuerpo “2” que es la primera barra del doble péndulo.
- Una junta de articulación B, que permite el giro relativo entre la segunda barra del péndulo (cuerpo 3) y la primera (cuerpo “2”).

Con referencia a la Fig.4a las ecuaciones de restricción correspondientes a cada articulación son las siguientes:

- Para la A se asume que está situada en el centro de masas del patín (o trolley) donde se han colocado los ejes locales  $(\xi_1, \eta_1)$  del sólido “1”.

Los vectores  $r$  son las coordenadas del punto A en los ejes globales  $(X, Y)$ . Dichas coordenadas son unívocas, y se estiman a partir de los ejes locales de cualquiera de los dos sólidos que deben representar el mismo punto. Su diferencia por tanto es el vector nulo, condición que explicita la ecuación (4) y se desarrolla en la ecuación (5). Mediante esta aproximación se puede, escribir para esta articulación la ecuaciones siguientes:

$${}^{(r,2)}\phi = r_2^A - r_1^A = 0 \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2^A \\ \eta_2^A \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Con idéntico planteamiento para la articulación B la ecuación de restricción es

$${}^{(r,2)}\phi = r_3^B - r_2^B = 0 \quad (6)$$

que desarrollada resulta ser

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cos\phi_3 & -\sin\phi_3 \\ \sin\phi_3 & \cos\phi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_3^B \\ \eta_3^B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2^B \\ \eta_2^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Finalmente el par prismático que existe entre el cuerpo “1” y el marco de referencia “0” se puede describir de forma analítica mediante el par de ecuaciones:

$${}^{(t,2)}\phi = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \cdot \vec{d} \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

En las cuales las coordenadas del vector  $u_1$  en los ejes locales  $(\xi_1, \eta_1)$  son  $u_1 = \{ 1 \ 0 \}$ , las coordenadas en los ejes globales de este vector también son las mismas pues la matriz de cambio de los ejes locales  $(\xi_1, \eta_1)$  a los ejes universales  $(X, Y)$  es la unidad, Fig.4a. Sin pérdida de generalidad el vector  $d$  ( $d = \{ x_1 - 0, y_1 - 0 \} = \{ x_1, y_1 \}$ ) va desde un punto del eje de deslizamiento del cuerpo “0” a otro punto del eje de deslizamiento del cuerpo “1”. Finalmente, según la ecuación (8), el producto escalar del vector  $u_1$  girado  $90^\circ$  por el vector  $d$  es:

$${}^{(t,2)}\phi = \begin{Bmatrix} -u_{1y}d_x + u_{1x}d_y \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

En suma la existencia del par prismático conlleva que  $y_1$  sea la constante 0 y que también sea constante y nulo el ángulo  $\phi_1$  que forma el eje local  $\xi_1$  con el eje global de abscisas X.

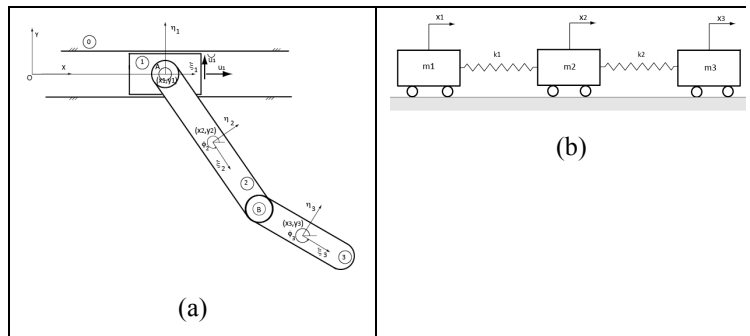


Fig.4.- a) Los cuerpos del sistema están vinculados por restricciones cinemáticas. b) Los cuerpos del sistema están vinculados mediante fuerzas elásticas.

A las restricciones cinemáticas expuestas, se debe añadir que la posición de la abscisa  $x_1$  del centro de masas del patín está definida por una función del tiempo  $f(t)$  conocida en cada instante. Esto hace que la ecuación de restricción a la que debe responder el controlador (*driver*) sea

$${}^{(d-x_1,1)}\phi = \{ x_1 - f(t) \} = 0 \quad (10)$$

Si los tres cuerpos se pudiesen desplazar libre e independientemente en el plano constituirían un sistema de nueve grados de libertad explicitado por el vector de coordenadas  $n_v$ , pero como el sistema se encuentra sometido a las siete ecuaciones de restricción (4 a 10) que se acaban de

describir, el número de grados de libertad (*degrees of freedom* *DOF*) es 2, de acuerdo con la expresión  $DOF = n_v - n_c$

$$c = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \phi_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \phi_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Las dos variables independientes son los ángulos  $\phi_2$  y  $\phi_3$  que forman las dos barras “2” y “3” con la vertical. Dichos ángulos son los ángulos que forman los ejes locales de abscisas respectivos con el eje de abscisas global.

Las correspondientes ecuaciones de restricción de velocidad y aceleración son:

$$\dot{\phi}(c) = D \cdot \dot{c} = 0 \quad (12)$$

$$\ddot{\phi}(c) = D \cdot \ddot{c} + \dot{D} \cdot \dot{c} = 0 \quad (13)$$

en las cuales D es la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción  $\phi(c) = 0$ . En este punto del análisis, de acuerdo con [3], la dinámica del sistema responde a la ecuación

$$m\ddot{c} - D' \cdot \lambda = h^c \quad (14)$$

En la cual  $m$  es la matriz inercial,  $\lambda$  son los multiplicadores de Lagrange que modelan las fuerzas de contacto y  $h^c$  son las fuerzas y pares exteriores aplicados. Esta ecuación integrada por alguno de los métodos numéricos para DAEs mediante computador permite estimar la respuesta del sistema a la entrada de movimiento del driver.

Nótese que la dinámica del sistema multicuerpo formado por el patín y el doble péndulo se describe mediante ecuaciones algebraicas y diferenciales (DAE). Por contraposición al sistema de la Fig 4b, que es un sistema de tres grados de libertad para explicitar la posición de las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  las cuales interactúan entre sí con fuerzas elásticas en lugar de mediante juntas cinemáticas. Este sistema masas-resortes, podría modelarse también con técnicas de sistemas multicuerpo, sin embargo aplicar dinámica newtoniana es mucho más fácil pues proporciona ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), que se resuelven de forma muy ágil y expeditiva, con los solucionadores (solvers) de la herramienta Matlab.

Para llevar a cabo el análisis experimental, el controlador (*driver*) R88D-KT01H de Omron, actúa por corriente sobre un servomotor síncrono del mismo fabricante. Este tipo de controlador permite introducir ordenes de movimiento proporcionales en el patín a través de un conjunto engrane corona cremallera ambas de módulo 1. El eje del servo es solidario a la corona y el patín de la guía lineal es solidario a la cremallera que es desplazada por la corona. Alternativamente

en un segundo sistema, con un diseño mecánico simétrico del anterior, cremallera fija y motor sobre el patín, se emplea un simple motor de cc, cuya maniobra de corriente básica permite solo órdenes de movimiento ON-OFF. Ambos se muestran en la Fig.5.

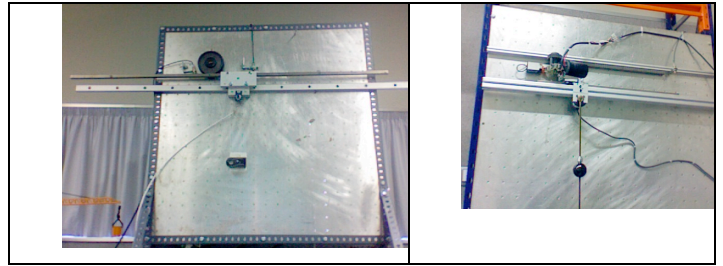


Fig.5.- Sistemas multicuerpo experimentales de transporte de piezas.

### B. Rotodinámica: Análisis dinámico de una máquina rotativa de referencia.

En este experimento se describe, a modo de ejemplo, el sistema mecánico constituido por una máquina rotativa de referencia, que está formada por un rotor que tiene una sola etapa inercial en su zona media (rotor de Jeffcott), representado en la Figura 6. En dicho sistema, se utilizan dos sensores electromagnéticos de medida de distancia y un sensor inductivo de proximidad (todo-nada) que genera la clave de fases.

En la Fig.7 se representa el esquema de bloques del sistema mecatrónico, que está constituido por un procesador en tiempo real que muestrea las señales analógicas y las transmite, mediante un procesador de comunicaciones que utiliza los protocolos TCP/IP, a un computador personal que la visualiza en un instrumento virtual (Fig. 8). Con estas señales es posible:

- Equilibrar el rotor a una determinada frecuencia de rotación (Fig.8a) [4].
- Obtener la respuesta en frecuencia: la órbita del rotor Fig.8b [5].

### C. Identificación de sistemas dinámicos.

En este experimento se analiza la oscilación de un fluido (*Sloshing*), que posee una respuesta muy poco amortiguada, cuando se desplaza el recipiente rectangular que lo contiene (Fig. 9). En algunos casos, las características del líquido (como por ejemplo su temperatura) hace que la citada oscilación no se pueda medir con un sensor en contacto con el fluido, y la mejor opción es utilizar un sensor de ultrasonidos y medir con él experimentalmente la frecuencia fundamental de vibración del fluido. Se logra de esta manera disponer de un dato que proporciona información sobre las características dinámicas del sistema. El valor teórico de la frecuencia natural enésima del fluido contenido en el recipiente (*container*) está dado por la ecuación:

$$\omega_n(n) = \sqrt{\left(g \cdot K(n) + \frac{\sigma}{\rho} \cdot K^3(n)\right) \cdot \tanh(K(n))} \quad (15)$$

en la cual  $K$  es el número de onda que depende de la geometría del recipiente  $K = n\pi/L$ ,  $L$  es la longitud del recipiente,

$\sigma$  es la tensión superficial del fluido,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $h$  es la profundidad del fluido. Por tanto a partir de la medida de la frecuencia fundamental ( $n=1$ ), y mediante la ecuación (15) se puede calcular un parámetro desconocido.

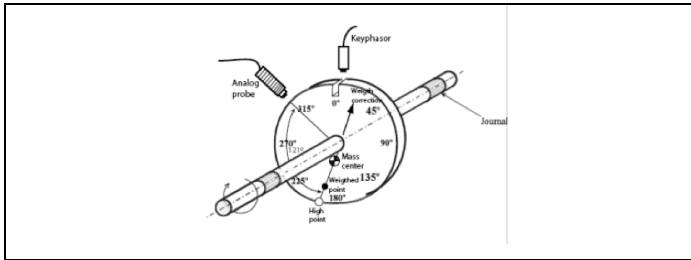


Fig.6.- Construcción de los ejes de medida de la deflexión del árbol con las sondas analógicas y la referencia angular con la clave fases.

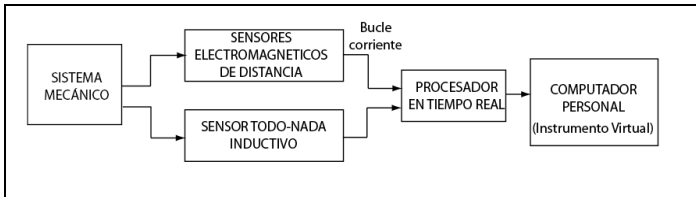


Fig. 7.- Esquema de bloques del sistema.

### III. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Este trabajo describe sucintamente algunas aplicaciones de la Mecatrónica vinculadas a la dinámica de sistemas mecánicos y pone en evidencia el amplísimo campo de investigación aplicada y desarrollo tecnológico que existe en Mecatrónica. La verificación experimental de modelos de sistemas multicuerpo, la síntesis de órbitas para detectar fallos en maquinaria rotativa, la identificación de parámetros sin introducir magnitudes de influencia, son solo algunos casos suficientemente descriptivos y valiosos para utilizarlos como referencia e incorporarlos en un laboratorio básico de Mecatrónica.

Este trabajo pone en evidencia que la Mecatrónica no es Robótica ni Teoría de Sistemas, sino la intersección entre la Tecnología electrónica, la Teoría de Máquinas, y la Teoría de Control. Los trabajos futuros contribuirán a establecer los límites de la Mecatrónica.

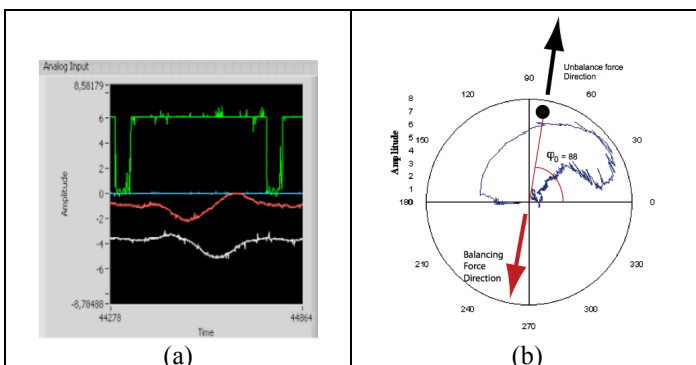


Fig.8.-a)Señales visualizadas mediante un instrumento virtual.b) Respuesta en frecuencia u órbita del rotor con la fase de desequilibrio.



Fig. 10.- Fotografía del recipiente con el fluido y el sensor de ultrasonidos.

### REFERENCES

- [1] Edward B. Magrab, Shapour Azarm, Balkumar Balchandran, James H. Duncan, Keith E. Herold, Gregory C. Walsh. An Engineer's Guide to MATLAB: with Applications from Mechanical, Aerospace, Electrical, and Civil Engineering. Second Edit. Pearson Prentice Hall, 1995.
- [2] Edward J. Haug. Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Allyn and Bacon Series in Engineering. 1989.
- [3] Parviz E. Nikravesh. Planas Multibody Dynamics: Formulation, Programming and Applications, CRC Press Taylor & Francis Group 2008.
- [4] F.M. Dimentberg. Flexural Vibrations of Rotating Shafts. Butterworth & CO (Publishers) LTD, London 1961.
- [5] Robert C. Eisenmann Sr., Robert C Eisenmann, Jr. Machinery Malfunction : Diagnosis and Correction. Prentice-Hall, 2000 (Nov).

